Selbst-Bewichtelungen bei 2/3 aller Spiele

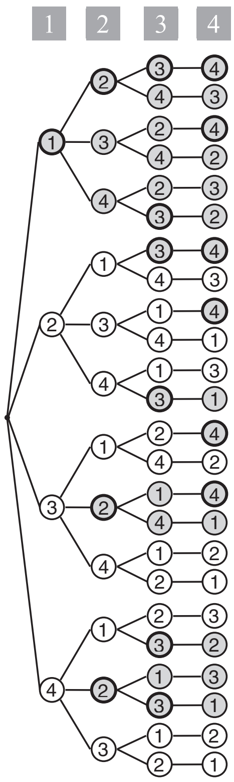
STEFAN BARTZ, MECKEL

Zusammenfassung: *Anhand eines überraschenden Zusammenhangs können sich interessierte Schüler ein zusätzliches, hochschulrelevantes Abzählverfahren der Kombinatorik (diskrete Mathematik) anschaulich und beispielorientiert erarbeiten. Im Schulbereich genügt es, wenn die unten abgebildeten 4 grundlegenden Anordnungs-/Auswahlfälle (Permutation, Variation, Kombination, Mehrfachbesetzung) abgezählt werden können (Bartz 2012). Bei der vorgestellten Wichtel-Aufgabe benötigt man jedoch die Anzahl der fixpunkthaltigen Permutationen.*

Anordnungsmöglichkeiten auf 5 Plätzen Einträge	Beispiel	#
5 versch.	✚ ☺ Ω Δ ≈	**5!**
2 versch.	✚ ☺ _ _ _	$\mathbf{\frac{5!}{3!}}$
2 gl.	☺ ☺ _ _ _	$\mathbf{\frac{5!}{3!2!}}$
8 gl.	☺☺☺| |☺☺|☺☺|☺☺|☺	$\mathbf{\frac{(8+4)!}{8!4!}}$

Wichteln mit 4 Personen

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Personen mind. eine sich selbst bewichteln muss?



E: mind. eine von 4 Personen zieht sich selbst.

P(E) = 15/24 = <u>62,50 %</u>; denn 15 der insgesamt 24 möglichen Pfade sind fixpunkthaltig.

Wie lassen sich die *fixpunkthaltigen* Baumpfade *systematisch* abzählen?

Jede der 4 Stellen innerhalb eines Baumpfades kann „von Hand" fix gehalten werden; für die übrigen 3 Stellen sind dann noch 3! Anordnungsmöglichkeiten vorhanden. Insgesamt erhält man so $4 \cdot 3! = 24$ Pfade, bei denen mindestens 1 Stelle fix ist. Bei dieser Zählweise werden jedoch diejenigen Pfade, mit genau 2, 3 und 4 Fixstellen, 2-fach, 3-fach und 4-fach gezählt (einmal, wenn die erste Fixstelle von Hand fix gehalten wird, und erneut, wenn die anderen Fixstellen von Hand fix gehalten werden.)

F	4	3	2		1	4	F	2

Um die korrekte Anzahl fixpunkthaltiger Pfade zu erhalten, muss die Anzahl der *unterschiedlichen* Pfade mit genau 2, 3 und 4 Fixstellen ermittelt und folglich 1-mal, 2-mal bzw. 3-mal subtrahiert werden:

$$\underbrace{4 \cdot (4-1)!}_{\text{mind. 1 Stelle fix}} - \underbrace{\binom{4}{2} \cdot 1}_{\text{genau 2}} - \underbrace{\binom{4}{3} \cdot 2}_{\text{genau 3}} - \underbrace{\binom{4}{4} \cdot 3}_{\text{genau 4 Stellen fix}}$$

$$= 24 - 6 - 8 - 3 = 7 \quad ↯$$

Das Ergebnis (7 statt 15) zeigt, dass diese Rechnung noch nicht stimmen kann. Der Binomialkoeffizient, etwa $\binom{4}{3}$, zählt zwar die Möglichkeiten, genau 3 von 4 Stellen fix zu halten.

F	2	F	F

Damit ist jedoch noch nicht der Anzahl der Pfade mit genau 3 Fixstellen bestimmt. Die Anordnungsmöglichkeiten und die Situation der Reststellen ist nicht beachtet worden. Es können nur 0 Pfade mit genau 3 Fixstellen existieren, da die Reststelle, die 4. Stelle, dann ebenfalls fix sein muss. Da es sich als schwierig erweist, die Anzahl der Pfade mit *genau* 2, 3, 4 Fixstellen systematisch abzuzählen, weicht man auf diejenigen mit *mind.* 2, 3, 4 Fixstellen aus und subtrahiert und addiert diese abwechselnd:

$$\underbrace{4 \cdot (4-1)!}_{\text{mind. 1 Stelle fix}} - \underbrace{\binom{4}{2} \cdot (4-2)!}_{\text{mind. 2}} + \underbrace{\binom{4}{3} \cdot (4-3)!}_{\text{mind. 3}} - \underbrace{\binom{4}{4} \cdot (4-4)!}_{\text{mind. 4 Stellen fix}}$$

$$= \frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!}$$

$$= 24 - 12 + 4 - 1 = 15 \quad ✓$$

In diesen vier „Mindestens-Ausdrücken" werden bestimmte Pfade mehrfach gezählt:

Ausdruck	Zählt die Pfade mit genau	Wie oft?
1	1, 2, 3, 4 Fixstellen	1-, 2-, 3-, 4-fach
2	2, 3, 4 Fixstellen	1-, 3-, 6-fach
3	3, 4 Fixstellen	1-, 4-fach
4	4 Fixstellen	1-fach

Interessanterweise bewirkt das abwechselnde Subtrahieren/Addieren, dass alle Pfade letztendlich genau 1-mal berücksichtigt werden. So werden die Pfade mit genau 4 Fixstellen durch den ersten Ausdruck 4-fach gezählt, durch den zweiten Ausdruck 6-fach subtrahiert, durch den dritten Ausdruck 4-fach addiert und durch den letzten Ausdruck wieder 1-fach subtrahiert. Funktioniert dieses Einschluss-/Ausschluss-Verfahren aber auch bei 5, 6 oder allgemein bei n Personen? Der dafür notwendige Beweis gründet auf der Feststellung, dass in der rechten Spalte der obigen Tabelle immer das Pascal'sche Dreieck entsteht. Und davon weiß man, dass die alternierende Summe *jeder* Zeile (hier Spalte) genau 0 beträgt[1].

Wichteln mit n Personen

> Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen mind. eine sich selbst bewichteln muss?

E: mind. eine von n Personen zieht sich selbst.

Wie oben gesehen, lässt sich die Anzahl der fixpunkthaltigen Pfade über das Einschluss/Ausschluss-Verfahren bestimmen mit:

$$\underbrace{n(n-1)!}_{\text{mind. 1 Stelle fix}} - \underbrace{\binom{n}{2}(n-2)!}_{\text{mind. 2}} + \underbrace{\binom{n}{3}(n-3)!}_{\text{mind. 3}} - \ldots \pm \underbrace{\binom{n}{n}(n-n)!}_{\text{mind. } n \text{ Stellen fix}}$$

$$\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots \pm \frac{n!}{n!}$$

Beispiele:

n	fixpunkthaltige Pfade	fixpunktfreie Pfade
1	$\frac{1!}{1!} = 1$	$1! - 1 = 0$
2	$\frac{2!}{1!} - \frac{2!}{2!} = 1$	$2! - 1 = 1$
3	$\frac{3!}{1!} - \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!} = 4$	$3! - 4 = 2$
4	$\frac{4!}{1!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} - \frac{4!}{4!} = 15$	$4! - 15 = 9$
5	$\frac{5!}{1!} - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!} = 76$	$5! - 76 = 44$

Teilt man die Anzahl der fixpunkthaltigen Pfade durch die Anzahl aller möglichen ($n!$), erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit für n Personen:

$$P(E) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

Dieser Ausdruck erinnert stark an die ersten Glieder der Zahl $1/e$:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{0!} - \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots \pm \frac{1}{n!} \\
&= 1 - \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \mp \frac{1}{n!}\right] \\
&\approx 1 - \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \mp \frac{1}{n!} \pm \ldots\right] \\
&= 1 - \frac{1}{e} \\
&= 63{,}21\ \%
\end{aligned}$$

Die erhaltene Wahrscheinlichkeit lässt sich also näherungsweise mithilfe von $1/e$ ausdrücken. Bereits ab 3 Personen stimmt die (interessanterweise von n unabhängige) Näherung recht gut. Zufälliges Wichteln geht somit *generell* in ca. 2/3 aller Spiele „schief" – egal wie viele Personen teilnehmen. Ca. 2/3 aller (zu einer bestimmten Ausgangsposition) möglichen Permutationen sind fixpunkthaltig.

Merke: Anzahlen bei Permutationen

fixpunkthaltige	$\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots \pm \frac{n!}{n!} = n! \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$	$\approx n!\left(1 - \frac{1}{e}\right)$
fixpunktfreie Derangements	$\frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots \pm \frac{n!}{n!} = n! \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$	$\approx n!\,\frac{1}{e}$
mit genau k Fixpunkten Rencontres	$\binom{n}{k} \cdot (n-k)! \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$	$\approx \frac{n!}{k!}\,\frac{1}{e}$

Abschließende Bemerkungen

- Wieso sehen die Abzählformeln der fixpunkthaltigen und der fixpunktfreien Permutationen fast identisch aus ($n!\sum_1^n \frac{(-1)^j}{j!}$ bzw. $n!\sum_0^n \frac{(-1)^j}{j!}$)? Anhand der „Pünktchenschreibweise" erkennt man, dass die zweite Formel dem Ausdruck „$n!$ – *erste Formel*" entspricht.
- Die beiden Abzählformeln hätten auch über den rekursiven Zusammenhang $A_n = (n-1) \cdot (A_{n-1} + A_{n-2})$ hergeleitet werden können. Kratz (2005), Rasfeld (2006) und Krauter (2005) erläutern, wie dies im Schulbereich geschehen könnte. Im vorliegenden Artikel wird dagegen der direkte Weg zur expliziten Abzählformel gewählt. Das Einschluss/Ausschluss-Verfahren kann so vorgestellt und der *Sinn* der alternierenden Rechenweise durch die „Mindest-Fixpunktpfade" veranschaulicht werden.

- Das Einschluss/Ausschluss-Verfahren wird in der Literatur auch *Inklusions/Exklusion-Prinzip*, die alternierende Rechenweise auch *Siebformel* genannt.

- Dem Autor ist das Problem während des Urlaubs begegnet, als die Töchter beim familiären „Mörderspiel" wissen wollten, wie „oft" es vorkommt, dass sich Spielteilnehmer selbst „ermorden müssen". In der Literatur findet man weitere Problem-Einkleidungen, bei denen es um vertauschte Briefe, Tanzpartner, Mäntel oder Hüte geht.

- Will man die Anzahl der Permutationen mit *genau k* Fixpunkten berechnen, bestimmt man zuerst die Anzahl der Stellenkombinationen für die k Fixpunkte, das sind $\binom{n}{k}$. Da die restlichen $(n-k)$ Stellen bei *jeder* dieser Kombinationen fix-punktfrei sein müssen, ergibt sich nebenstehender Ausdruck. Die oben fehlerhaft berechnete Anzahl der Pfade mit *genau* 2, 3, und 4 Fixpunkten hätten folglich bestimmt werden müssen mit:

$$\binom{n}{k}\cdot\underbrace{(n-k)!\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}}_{\text{Möglichkeiten für die }(n-k)\text{ fixpunktfreien Reststellen}}$$

$$\binom{4}{2}(4-2)!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)=6\,;$$

$$\binom{4}{3}(4-3)!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)=0\,;\ \binom{4}{4}(4-4)!\left(\frac{1}{0!}\right)=1\,.$$

Anmerkungen

1 Da in dem Pascal'schen Dreieck der Tabelle die führenden 1en fehlen, betragen die alternierenden (Spalten-) Summen dort immer 1. Die regulären, nicht-alternierenden Summen ergeben $2^n - 1$.

Literatur

Bartz S. (2009): Was tun bei Mammutbäumen? In: *Stochastik in der Schule* 29(1), S. 13–17.

Bartz S. (2012): Empfehlungen zur Behandlung der Kombinatorik. In: *Stochastik in der Schule* 32(1), S. 21–25.

Kipp S. (2004): Die Mathematik des Wichtelns. www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/pci/wichteln.pdf.

Kratz H. (2005): Das Problem der vertauschten Briefe – Zwei Wege zur Herleitung der Rekursionsformel. In: *Stochastik in der Schule* 25(1), S. 11–15.

Krauter S. (2005): Einführung in die Elementare Kombinatorik.
www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/2e-imix-t-1/user_files/Veranstaltungsmaterialien_offen/Zusatzmaterialien/Skripte_Krauter/Komb_Endfassung_20_01_06.pdf.

Rasfeld P. (2006): Die Untersuchung des Problems der vertauschten Briefe im Unterricht anhand von Quellentexten. In: *Stochastik in der Schule* 26(2), S. 20–27.

Anschrift des Verfassers

Stefan Bartz
St. Willibrod Gymnasium
Denkmalstraße 8
54634 Bitburg
info@stefanbartz.de